C3T12 – Équations et inéquations

Objectif 12-1 Résoudre algébriquement une équation

Vocabulaire

$2x - 5 = x + 1$ est une **équation** où l'**inconnue** est désignée par la lettre x.

Cette équation a deux **membres** : $2x - 5$ (membre de gauche) et $x + 1$ (membre de droite).

Les **solutions de l'équation** $2x - 5 = x + 1$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x - 5 = x + 1$ est vérifiée. **Résoudre l'équation** c'est trouver l'ensemble des solutions.

Règles utilisées

On obtient une égalité équivalente en **ajoutant** ou en **soustrayant** un **même nombre** à chaque membre.

On obtient une égalité équivalente en **multipliant** ou en **divisant** chaque membre par un **même nombre non nul**.

On obtient une égalité équivalente en **permutant les membres** de gauche et de droite.

Méthode

On cherche, **par réécritures successives**, à écrire une **équation équivalente** dans laquelle on a dans un membre **une seule fois l'inconnue** et dans l'autre une **valeur numérique**.

Exemple : Résous l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

L'objectif est d'avoir les "x" d'un côté et les nombres de l'autre.

$7x + 2 = \mathbf{4x} + 9$ ⟶ **On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $\mathbf{4x}$ aux deux membres.

$7x + 2 \mathbf{- 4x} = \mathbf{4x} + 9 \mathbf{- 4x}$

$3x \mathbf{+} 2 = 9$

$3x \mathbf{+ 2} = 9$ ⟶ **On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche** en retranchant **2** aux deux membres.

$3x \mathbf{+ 2 - 2} = 9 \mathbf{- 2}$

$3x = 7$

$\mathbf{3}x = 7$ ⟶ **On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par **3**.

$\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{7}{\mathbf{3}}$

$x = \frac{7}{3}$

On vérifie que $\frac{7}{3}$ est une solution de l'équation initiale :

Membre de gauche : $7\times\frac{7}{3}+2=\frac{49}{3}+\frac{6}{3}=\frac{55}{3}$

Membre de droite : $4\times\frac{7}{3}+9=\frac{28}{3}+\frac{27}{3}=\frac{55}{3}$

Donc lorsque $x = \frac{7}{3}$ les deux membres de l'équation sont égaux.

Conclusion : $x = \frac{7}{3}$ est la solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

C3T12 – Équations et inéquations

Objectif 12-2 Cas particulier : Résoudre une équation-produit

A connaître

Un **produit de facteurs est nul** (c'est à dire égal à 0) si l'**un des facteurs, au moins, est nul**.

Exemple d'utilisation : Résoudre l'équation $(3x+6)(2x-1)=0$

Le membre de gauche est le produit de $(3x+6)$ par $(2x-1)$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs, au moins, est nul, donc le produit $(3x+6)(2x-1)$ est nul lorsque $(3x+6)$ est égal à zéro ou lorsque $(2x-1)$ est égal à zéro donc :

$(3x+6)=0$	ou	$(2x-1)=0$
$3x=-6$		$2x=1$
$x=-2$		$x=0,5$

Conclusion : Les solutions de l'équation sont -2 et 0,5.

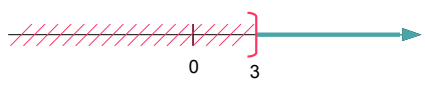
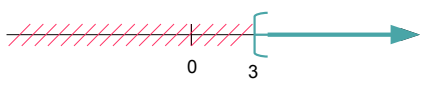
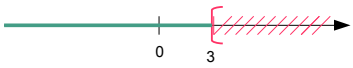
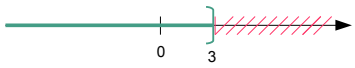
C3T12 – Équations et inéquations

Objectif 12-3 Résoudre algébriquement une inéquation

Vocabulaire

Une équation traduit une égalité entre deux membres. Une **inéquation** traduit une **inégalité** : le membre de gauche est **supérieur** ou **inférieur** au membre de droite.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation

$x>3$ 	$x\geq 3$ 
$x<3$ 	$x\leq 3$ 

On colorie (ici en vert) la partie qui convient, on hachure (ici en rouge) la partie qu'il faut rejeter.
Le crochet est tourné vers la partie à laquelle appartient la limite et prend sa couleur.

Règles utilisées

On ne change pas les solutions d'une inéquation lorsqu'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre.

Attention : lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre négatif le sens de l'inégalité est inversé (voir thème 12 de 4ième Calcul littéral Objectif 12-3).

Méthode

On cherche, **par réécritures successives**, à écrire une **inéquation équivalente** dans laquelle on a dans un membre **une seule fois l'inconnue** et dans l'autre une **valeur numérique**.

Exemple : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-3x-8\leqslant x-1$.

$-3x-8\leqslant x-1$	
$-3x-8\textbf{ }\mathbf{-x}\leqslant x-1\mathbf{-x}$ $-4x-8\leqslant -1$	On soustrait x à chaque membre.
$-4x-8\mathbf{+8}\leqslant -1\mathbf{+8}$ $-4x\leqslant 7$	On ajoute 8 à chaque membre.
$\frac{-4x}{\mathbf{-4}}\geqslant \frac{7}{-4}$ $x\geqslant -\frac{7}{4}$	On divise chaque membre par -4. Comme -4 est un nombre **négatif**, **on change le sens de l'inégalité.**
Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.	On conclut en décrivant les solutions.

C3T12 – Équations et inéquations

Objectif 12-4 Résoudre un problème en utilisant une équation ou une inéquation

Lorsque la résolution d'un problème par le calcul numérique (méthode par essai-erreur ou autre type de résolution directe) devient fastidieuse voire impossible, utiliser une équation ou une inéquation s'avère souvent nécessaire.

Méthode

- Déterminer l'inconnue du problème et lui attribuer un nom
- Mettre le problème en équation : Traduire son énoncé par une égalité mathématique.
- Résoudre l'équation
- Vérifier que la solution trouvée lors de la résolution fonctionne dans le contexte du problème et répondre au problème

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à son double diminué de 3.

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x le nombre cherché. ⟶ **On repère la grandeur non connue** parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note généralement x et on l'appelle « inconnue ».

Étape n°2 : Mettre en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$.

Le double du nombre diminué de 3 est $2x - 3$.

⟶ **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x.

$5x + 7 = 2x - 3$ ⟶ La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= 2x - 3 \\ 5x + 7 \textbf{ – 2}x &= 2x - 3 \textbf{ – 2}x \\ 3x + 7 &= -3 \\ 3x + 7 \textbf{ – 7} &= -3 \textbf{ – 7} \\ 3x &= -10 \\ \frac{3x}{\textbf{3}} &= \frac{-10}{\textbf{3}} \\ x &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

⟶ **On résout l'équation**

Étape n°4 : Vérifier que la valeur trouvée est solution du problème et conclure.

Le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 : $5\times\left(-\frac{10}{3}\right)+7=-\frac{50}{3}+\frac{21}{3}=-\frac{29}{3}$

Le double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3 : $2\times\left(-\frac{10}{3}\right)-3=-\frac{20}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{29}{3}$

Ainsi le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 est égal au double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3.