C3T9 – Fonctions linéaires et affines

Objectif 9-1 Reconnaître une fonction linéaire et une fonction affine

A connaître

On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x$) où a est un nombre.

Tout tableau de valeurs d'une **fonction linéaire** est un **tableau de proportionnalité**.

Pour démontrer qu'un tableau de valeurs est associé à une fonction linéaire, il suffit de montrer que c'est un tableau de proportionnalité.

On appelle **fonction affine**, de coefficients a et b, toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres relatifs.

Exemples

$f(x) = 2 \times x$ est une fonction **linéaire** de coefficient 2 ($a = 2$).

$g(x) = \frac{x}{4}$ est une fonction **linéaire** de coefficient $\frac{1}{4}$ (car $\frac{x}{4} = x \times \frac{1}{4}$).

$h(x) = 2 \times x - 3$ est une fonction **affine** de coefficients a=(+2) et b=(-3).

$k(x) = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ est une fonction **affine** de coefficients $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Objectif 9-2 Déterminer, par le calcul, l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire ou affine

Exemple pour une fonction linéaire :

Soit la fonction f telle que $f(x) = 3\,x$; Calcule l'image de 4 et l'antécédent de 15 par le fonction f.

Image de 4	Antécédent de 15
$f(4) = 3 \times 4$ On remplace x par 4. $f(4) = 12$ On calcule. L'image de 4 par la fonction f est 12.	On cherche le nombre n qui a pour image 15 par la fonction f. L'image de n est $f(n) = 3n$ donc on résout l'équation : $f(n) = 15$ ou encore $3\,n = 15$ $n = 5$ L'antécédent de 15 par f est donc 5.

Exemple pour une fonction affine :

Soit la fonction f telle que $f(x) = 2x - 9$. Calcule l'image de 3 et l'antécédent de 7 par le fonction f.

Image de 3	Antécédent de 7
$f(3) = 2 \times 3 - 9$ On remplace x par 3. $f(3) = -3$ On calcule. L'image de 3 par la fonction f est -3.	On cherche le nombre n qui a pour image 7 par la fonction f. L'image de n est $f(n) = 2n - 9$ donc on résout l'équation : $f(n) = 7$ ou encore $2n - 9 = 7$ $2n = 7 + 9$ $2n = 16$ $n = 8$ L'antécédent de 7 par f est donc 8.

Objectif 9-3 Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine

A connaître

Dans un repère, la représentation graphique d'une **fonction linéaire** f de coefficient a est l'ensemble des points de coordonnées (x ; $a\,x$).
Cet ensemble de points constitue une **droite passant par l'origine** du repère.

Remarque : Pour tracer une droite, on a besoin de deux de ses points. Comme la droite représentative d'une fonction linéaire passe par l'origine du repère, il suffit d'en déterminer un autre.

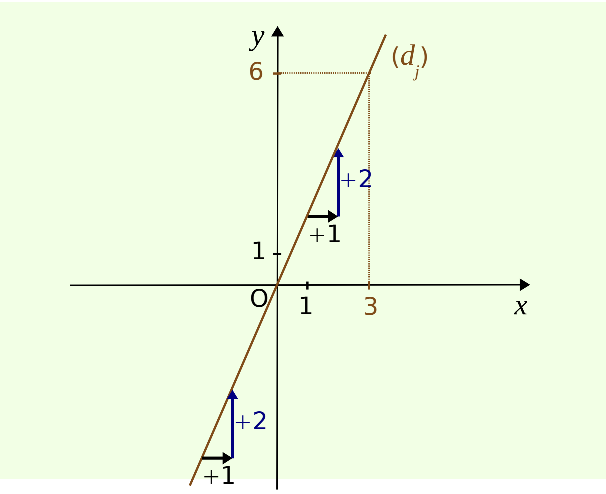
Dans un repère, la représentation graphique d'une **fonction affine** f de coefficients a et b est l'ensemble des points de coordonnées (x ; ax+b). Cet ensemble de points constitue une **droite.**
Le point de coordonnées (0;b) est un point particulier de cette droite.

Remarque : Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux de ses points. Comme on connaît déjà le point (0;b), il suffit d'en déterminer un autre.

Le coefficient **a** est le **coefficient directeur** de la droite, aussi appelé **pente**.
Il indique la direction de la droite représentative en donnant l'accroissement de l'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de **1**.

Le coefficient **b** s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : c'est l'ordonnée quand l'abscisse vaut 0.

Exemple : Représente graphiquement la **fonction linéaire** f définie par $f(x) = 2\,x$

<table>
<tr><th>Sur la copie</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>f est une fonction linéaire de coefficient a = 2, donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
De plus, $f(3)= 6$ donc elle passe par le point de coordonnées (3 ; 6).</td><td>Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points, mais on en connaît déjà un : l'origine. On calcule donc l'image d'un seul nombre.
<table><tr><td>Valeur de x</td><td>3</td><td>On choisit 3.</td></tr><tr><td>Valeur de $f(x)$</td><td>6</td><td>On calcule
$f(3)= 2 \times 3=6$</td></tr><tr><td>Point de la droite</td><td>(3 ; 6)</td><td>Coordonnées du point : (x ; $f(x)$)</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td>On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes.

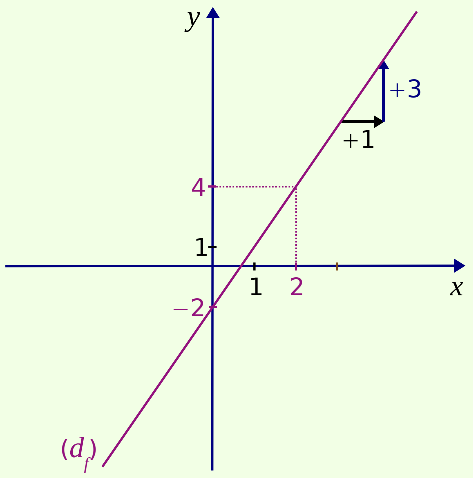
On place dans le repère le point de coordonnées (3 ; 6).

On trace la droite (d_f) passant par ce point et l'origine du repère.

Remarque : Cette droite a une pente de 2 :
Lorsque l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2.</td></tr>
</table>

C3T9 – Fonctions linéaires et affines

Exemple : Représente graphiquement la fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 2$.

Sur la copie	Commentaires
f est une fonction affine de coefficients a = 3 et b = − 2, donc sa représentation graphique est une droite. De plus, $f(0) = -2$ et $f(2) = 4$ donc elle passe par les points de coordonnées (0 ; −2) et (2 ; 4).	Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points : on calcule l'image de deux nombres. Valeur de x : 0 ; 2 Valeur de $f(x)$: −2 ; 4 Point de la droite : (0 ; −2) ; (2 ; 4)
	On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes. On place dans le repère les points de coordonnées (0 ; −2) et (2 ; 4). On trace la droite (d_f) passant par ces points. Remarques : - Cette droite a une pente de 3 : Lorsque l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 3. - Elle coupe l'axe des ordonnées en −2 (ordonnée à l'origine).

Cas particuliers

Si b = 0, le point (0;0) appartient à la droite représentative de la fonction.

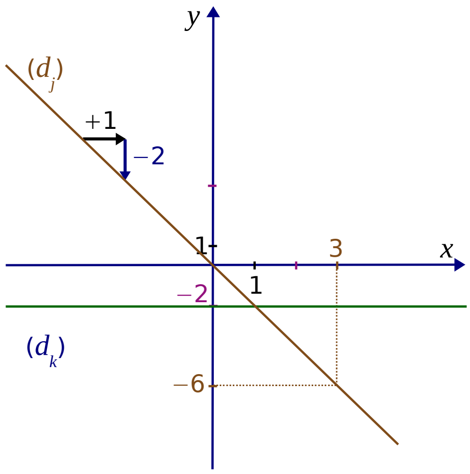
Les fonction linéaires sont donc des cas particuliers de fonctions affines.

Exemple : $j : x \longmapsto -2x$.

Si a = 0 on dit que la **fonction est constante**.

Tous les points de sa représentation graphique ont pour ordonnée b.

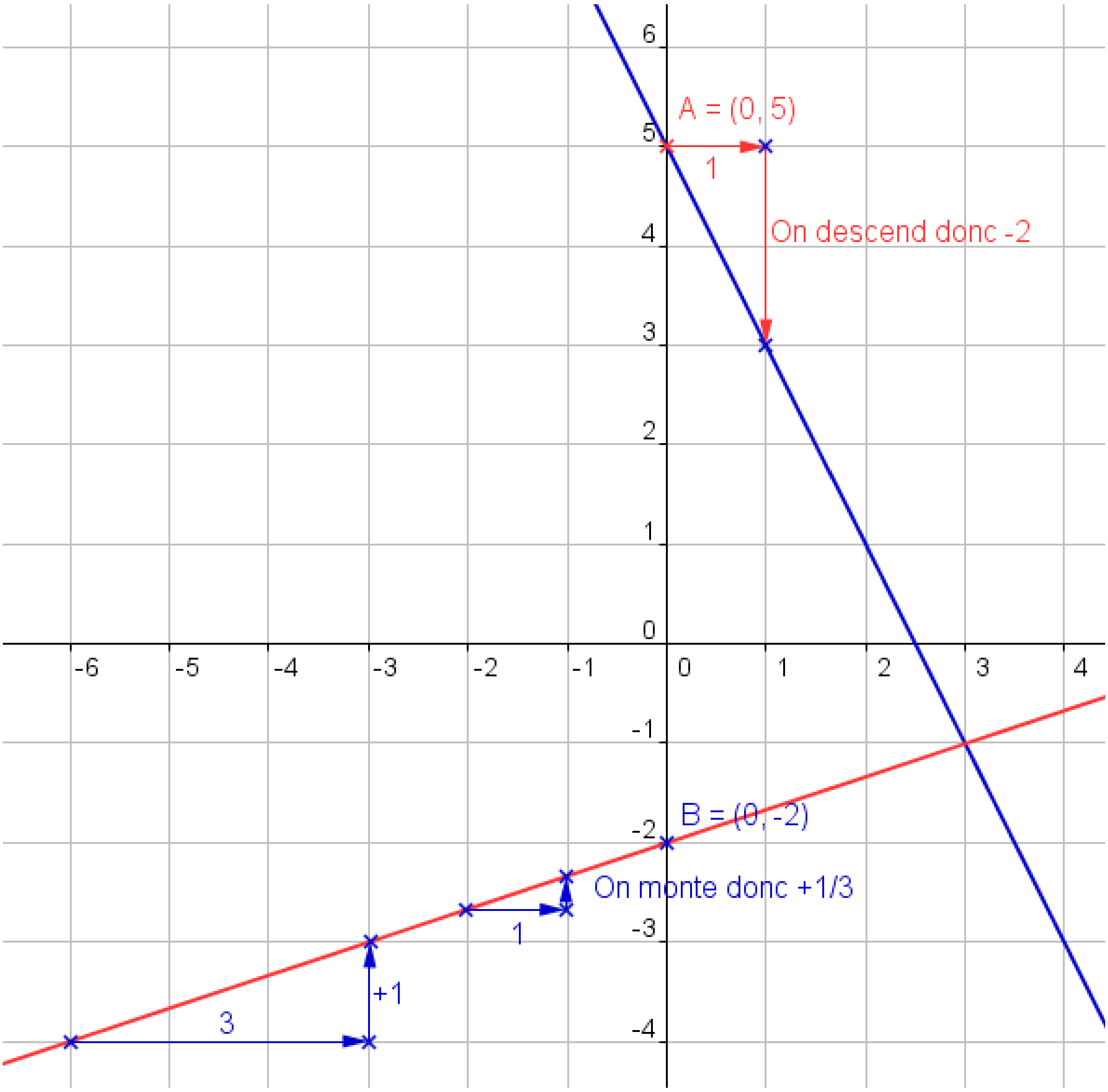
Exemple : $k : x \longmapsto -2$.



C3T9 – Fonctions linéaires et affines

Objectif 9-4 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine associée à une droite donnée dans un repère

Exemple



La **pente** de la droite correspond au coefficient **a**, compté positif si la droite « monte », négatif si la droite « descend ». Elle indique la direction de la droite représentative en donnant l'accroissement de l'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de **1.**

L'**ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées** donne le coefficient **b**.

Droite bleue :	Droite rouge :
Pente : -2 A(0;5) donc b = 5 $f(x)=-2x+5$	Pente : $+\frac{1}{3}$ B(0;-2) donc b = -2 $g(x)=\frac{1}{3}x-2$

C3T9 – Fonctions linéaires et affines

Objectif 9-5 Travailler avec des pourcentages d'augmentation ou de réduction

A connaître

Augmenter une quantité de t% revient à la multiplier par $(1+\frac{t}{100})$.

Diminuer une quantité de t% revient à la multiplier par $(1-\frac{t}{100})$.

Exemples :

Augmenter une quantité de **12%** revient à la multiplier par **1,12**.

Augmenter une quantité de **3%** revient à la multiplier par **1,03**.

Augmenter une quantité de **7,5%** revient à la multiplier par **1,075**.

Diminuer une quantité de **30%** revient à la multiplier par **0,70**.

Diminuer une quantité de **4%** revient à la multiplier par **0,96**.

Méthode

Dans les problèmes traitant d'augmentation ou de réduction exprimés en pourcentage, on cherchera à écrire la relation :

Quantité finale = Quantité initiale × coefficient

Exemple

Énoncé : « Après une réduction de 35% un article coûte 29,25 €, quel était son ancien prix. »

On note Ap l'ancien prix et Np le nouveau prix.
Diminuer une quantité de 35% revient à multiplier par le coefficient 0,65.
On a donc : **Np = Ap x 0,65** soit 29,25 = Ap x 0,65, ou encore Ap = 29,25 : 0,65 d'où Ap = 45.

L'ancien prix était de 45 €.