C4T16 – PROBABILITÉS

Objectif 16-1 Vocabulaire

1. Expérience aléatoire

Exemples

- **E_1** On lance un dé non truqué à 6 faces.
- **E_2** On tire une carte d'un jeu qui en comporte 32.
- **E_3** On lance, deux fois de suite, une pièce de monnaie.

Définition

On appelle **expérience aléatoire** un processus dont on peut prévoir tous les résultats possibles mais dont on ignore lequel sera obtenu.

2. Partie, tirage, lancer, épreuve

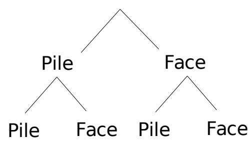
Exemples

Pour **E_1** et **E_2** une partie se compose d'une épreuve unique, une seule étape, un seul lancer, un seul tirage. Pour **E_3** une partie est composée de 2 épreuves, 2 étapes, 2 lancers, 2 tirages.

3. Ensemble Ω des résultats (ou issues ou éventualités) possibles

Exemples

- **E_1** Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
- **E_2** Ω = {7♠ ; 8♠ ; 9♠ ; 10♠ ; V♠ ; D♠ ; R♠ ; A♠ ; 7♥ ; 8♥ ; 9♥ ; 10♥ ; V♥ ; D♥ ; R♥ ; A♥ ; 7♦ ; 8♦ ; 9♦ ; 10♦ ; V♦ ; D♦ ; R♦ ; A♦ ; 7♣ ; 8♣ ; 9♣; 10♣; V♣; D♣; R♣; A♣}
- **E_3** Ω = {(Pile,Pile) ; (Pile,Face) ; (Face,Pile) ; (Face,Face)}



arbre binaire

Avant de traiter un problème de probabilité il est fortement recommandé d'expliciter l'ensemble Ω.

4. Évènement

Exemples

- **E_1** {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6}

  {«Tirer un nombre inférieur ou égal à 4»} = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

  {«Tirer un 3»} = {3}

- **E_2** {«Tirer un trèfle»} = {7♣ ; 8♣ ; 9♣ ; 10♣ ; V♣ ; D♣ ; R♣ ; A♣}

  {«Tirer un valet»} = {V♦ ; V♥ ; V♠ ; V♣}

  {«Tirer le roi de trèfles»} = {R♣}

- **E_3** {« Tirer 2 fois face »} = {(Face,Face)}

  {« Tirer face au premier lancer »} = {(Face,Face) ; (Face,Pile)}

  {« Finir par un pile »} = {(Face,Pile) ; (Pile,Pile)}}

C4T16 – PROBABILITÉS

5. Évènement élémentaire

C'est un évènement qui ne comporte qu'une seule issue. (1 seul élément de l'ensemble Ω).

Exemples

{«Tirer un 3»} = {3} ; {«Tirer le roi de trèfles»} = {R♣} ; {« Tirer 2 fois face »} = {(Face,Face)}

Remarques

Si {«Tirer un 3»} est réalisé alors {«Tirer un nombre inférieur ou égal à 4»} l'est aussi mais pas {«Tirer un nombre pair»}.

Si {«Tirer le roi de trèfles»}est réalisé alors {«Tirer un trèfle»}l'est aussi mais pas {«Tirer un valet»}.

6. Évènements complémentaires (ou contraires)

Deux évènements sont **complémentaires** si lorsque l'un est réalisé l'autre ne l'est pas.

L'évènement contraire de l'évènement A est noté $\overline{A}$.

Exemple

A = {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6} et $\overline{A}$ = {«Tirer un nombre impair»} = {1 ; 3 ; 5}.

7. Évènements incompatibles

Deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

A = {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6} et B = {«Tirer un 1»} = {1}.

8. Probabilité d’un évènement

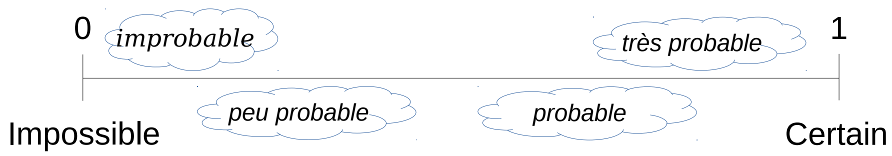
Définitions

La **probabilité** d'un événement est une **estimation de ses chances de se produire**. Cette estimation correspond à **un nombre compris entre 0 et 1**, exprimé sous forme décimale, fractionnaire ou en pourcentage.

Un événement **impossible** a une probabilité de **0**, ou dit autrement, a 0 % de chance de se produire.

Un événement **certain** a une probabilité de **1**, ou dit autrement, a 100 % de chance de se produire.

Remarque : On peut visualiser la probabilité des événements sur une échelle de probabilité :



C4T16 – PROBABILITÉS

Objectif 16-2 Calculer des probabilités en utilisant un modèle

Il est parfois possible d'évaluer des probabilités par un raisonnement à priori.

Exemple 1

Détermine la probabilité de tirer un as dans un jeu de 32 cartes.

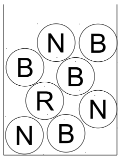
Ω = {7♠ ; 8♠ ; 9♠ ; 10♠ ; V♠ ; D♠ ; R♠ ; A♠ ; 7♥ ; 8♥ ; 9♥ ; 10♥ ; V♥ ; D♥ ; R♥ ; A♥ ;

7♦ ; 8♦ ; 9♦ ; 10♦ ; V♦ ; D♦ ; R♦ ; A♦ ; 7♣ ; 8♣ ; 9♣; 10♣; V♣; D♣; R♣; A♣}

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre as. Il y a donc quatre chances sur 32 de tirer un as soit une probabilité de $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Exemple 2

Dans une urne, il y a une boule rouge, quatre bleues et trois noires, indiscernables au toucher. Détermine la probabilité de tirer une boule bleue.



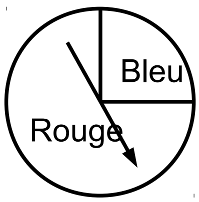
Ω = {R ; B ; B ; B ; B ; N ; N ; N}. Il y a 8 boules en tout dans l'urne, donc il y a 4 chances sur 8 de tirer une boule bleue soit une probabilité de $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Exemple 3

Dans une loterie, une roue est divisée en deux secteurs, rouge et bleu, comme indiqué sur le schéma. On fait tourner un pointeur et il s'arrête, au hasard, devant l'un des secteurs. S'il s'arrête sur une ligne frontière on rejoue. Détermine la probabilité qu'il s'arrête sur le rouge.

Ω = {(« L'aiguille s'arrête sur le secteur rouge ») ; (« L'aiguille s'arrête sur le secteur Bleu »)}.

Deux Évènements complémentaires, non équiprobables.



On remarque que le secteur rouge occupe les trois-quart de la roue.

La probabilité que le pointeur s'arrête sur le secteur rouge est de $\frac{3}{4}$.

Retenir

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se produire on dit qu'il y a équiprobabilité.

La probabilité d'un évènement A est égale à $p(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Si A et $\bar{A}$ sont deux évènements **complémentaires (ou contraire)**, la somme de leur probabilité vaut 1 : on a $p(A)+p(\bar{A})=1$

Si A et B sont deux évènements **incompatibles**, la probabilité d'obtenir l'**un ou l'autre** est la somme de leur probabilité : on a $p(A \text{ ou } B)=p(A)+p(B)$

Exemples

- A = {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6} et $\bar{A}$ = {«Tirer un nombre impair»} = {1 ; 3 ; 5}

  A et $\bar{A}$ sont <u>complémentaires</u>(ou contraires) ; on a $p(A)+p(\bar{A})=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1$

- A = {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6} et B = {«Tirer un 1»} = {1}

  A et B sont <u>incompatibles</u> ; on a $p(A \text{ ou } B)=p(A)+p(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

C4T16 – PROBABILITÉS

Objectif 16-3 Évaluer des probabilités à partir de fréquences observées expérimentalement

Lorsqu'il n'est pas possible de modéliser l'expérience, on peut estimer les probabilités en s'appuyant sur les résultats observés et en calculant les fréquences qui en découlent.

Remarque : Il faut un très grand nombre de résultats pour pouvoir avoir une estimation à peu près correcte des probabilités.

Exemple

On a lancé un dé pipé (c'est à dire déséquilibré) 3000 fois, et on a relevé les résultats dans le tableau suivant. Détermine la probabilité d'obtenir un 5 avec ce dé.

numéro	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
tirages	685	428	556	444	572	315

Le 5 est sorti 572 fois sur 3000, la probabilité **semble être** d'environ $\frac{572}{3000} \approx 0,19$.

(Pour rappel, avec un dé équilibré, la probabilité d'obtenir chaque numéro est de $\frac{1}{6} \approx 0,166$).