

C3T12 – Inéquations

Objectif 12-1 Comparaisons de nombres relatifs, ordre et opérations

Rappel

Pour comparer deux nombres relatifs, on peut étudier le **signe de leur différence** :

$$\text{Si } a - b > 0 \text{ alors } a > b$$

$$\text{Si } a - b = 0 \text{ alors } a = b$$

$$\text{Si } a - b < 0 \text{ alors } a < b$$

réciroquement :

$$\text{Si } a > b \text{ alors } a - b > 0$$

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a - b = 0$$

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a - b < 0$$

Des règles analogues existent aussi pour les symboles $<$, \leq et \geq .

Exemple : Comparer π et $\frac{22}{7}$:

Avec la calculatrice, on trouve $\pi - \frac{22}{7} \approx -0,001264489$ c'est à dire $\pi - \frac{22}{7} < 0$ donc $\pi < \frac{22}{7}$.

Ordre et opérations

(Revoir Niveau 4^e thème 12 : [objectif 12-3](#).)

| | $5 < 7$ | $a < b$ |
|--|--|--|
| Le sens de l'inégalité est conservé lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'inégalité. | $5 + 3 < 7 + 3$ $5 - 4 < 7 - 4$ | $a + 17 < b + 17$ $a - 6 < b - 6$ |
| Le sens de l'inégalité est conservé lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre positif les deux membres de l'inégalité. | $5 \times 3 < 7 \times 3$ $5 \div 4 < 7 \div 4$ | $a \times 3 < b \times 3$ $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$ |
| Le sens de l'inégalité est inversé lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre négatif les deux membres de l'inégalité. | $5 \times (-3) > 7 \times (-3)$ $5 \div (-4) > 7 \div (-4)$ | $a \times (-1) > b \times (-1)$ $\frac{a}{(-3)} > \frac{b}{(-3)}$ |
| Le sens de l'inégalité est inversé pour les opposés . (Prendre l'opposé revient à multiplier par -1). | $-5 > -7$ | $-a > -b$ |
| Le sens de l'inégalité est inversé pour les inverses . | $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$ | $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ |
| Attention si on échange l'ordre des membres d'une inéquation. | $5 < 7$ donne $7 > 5$ | $a < b$ donne $b > a$ |

C3T12 – Inéquations

Objectif 12-2 Inéquations

À retenir

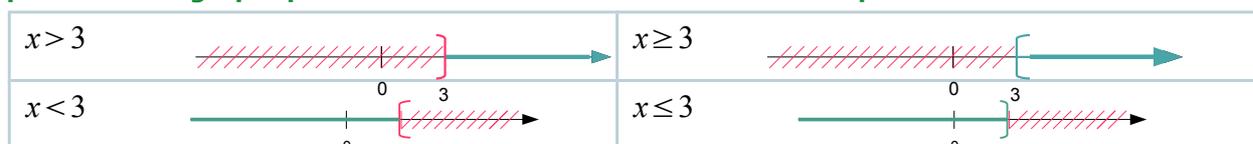
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Règles utilisées

On ne change pas les solutions d'une inéquation lorsqu'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre.

Attention : lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre négatif le sens de l'inégalité est inversé.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation



On colore (ici en vert) la partie qui convient, on hachure (ici en rouge) la partie qu'il faut rejeter. Le crochet est tourné vers la partie à laquelle appartient la limite et prend sa couleur.

Exemple 1 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $7x - 3 > 2x - 1$.

| | |
|---|---|
| $7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x$ | On soustrait $2x$ à chaque membre. |
| $5x - 3 > -1$ | On réduit. |
| $5x - 3 + 3 > -1 + 3$ | On ajoute 3 à chaque membre. |
| $5x > 2$ | On réduit. |
| $x > \frac{2}{5}$ | On divise chaque membre par 5 . Comme 5 est un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité ne change pas. |
| Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$. | On conclut en décrivant les solutions*. |

Exemple 2 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-3x - 8 \leq x - 5$.

| | |
|---|---|
| $-4x - 8 \leq -1$ | On soustrait x à chaque membre. |
| $-4x \leq 7$ | On ajoute 8 à chaque membre. |
| $x \geq -\frac{7}{4}$ | On divise chaque membre par -4 . Comme -4 est un nombre négatif , on change le sens de l'inégalité. |
| Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$. | On conclut en décrivant les solutions*. |

C3T12 – Inéquations

Objectif 12-3 Traduire un énoncé par une inéquation à une inconnue et résoudre le problème

Exemple

Un théâtre propose un tarif plein à 20 € et une carte d'abonnement, payée 50 €, donnant droit à un tarif réduit de 30 %.

Exprime, en fonction du nombre d'entrées, le prix à payer plein tarif et le prix avec abonnement.

Détermine le nombre d'entrées pour que l'abonnement soit avantageux.

Étape n°1 : Choix de l'inconnue

On la note généralement x . **Attention au contraintes.**

Soit x le nombre d'entrées, x nombre entier positif.

Étape n°2 : Mise en inéquation du problème

On exprime $P(x)$ (prix plein tarif).

$$P(x) = 20x$$

On exprime $P'(x)$ (prix avec abonnement).
Réduire de 30 % revient à multiplier par 0,70.

$$P'(x) = 0,7 \times 20x + 50 = 14x + 50$$

On nous demande de déterminer x tel que $P'(x) \leq P(x)$

D'où l'inéquation : $14x + 50 \leq 20x$

Étape n°3 : Résoudre l'inéquation

On soustrait $14x$ à chaque membre de l'inéquation.

$$14x + 50 - 14x \leq 20x - 14x$$

On réduit.

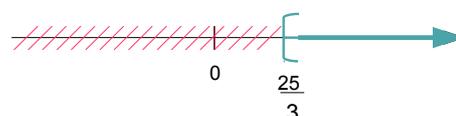
$$50 \leq 6x$$

On divise chaque membre par le coefficient de x , ici 6 (positif) ; donc on ne change pas le sens de l'inégalité.

$$\frac{50}{6} \leq \frac{6x}{6}$$

On obtient un ensemble de solutions mathématiques et sa représentation graphique.

$$\frac{25}{3} \leq x \text{ ou encore } x \geq \frac{25}{3}$$



Étape n°4 : Vérifier le calcul et contrôler la cohérence et la vraisemblance

On vérifie ensuite que si

$$\frac{25}{3} \leq x \text{ on a bien } 50 \leq 6x \text{ puis } 50 + 14x \leq 6x + 14x$$

Mais l'ensemble des solutions mathématiques est à restreindre. **Il ne faut garder que les nombres entiers.**

Étape n°5 : Conclure

Et comme on cherche le plus petit entier de l'ensemble solution on conclut que : « l'abonnement est avantageux à partir de 9 entrées ».

C3T12 – Inéquations