C3T14 – Systèmes d'équations

Objectif 14-1 Résoudre algébriquement un système de deux équations à deux inconnues admettant une solution et une seule. En donner une interprétation graphique

1. Méthode de résolution par substitution

Exemple : résolution du système $\begin{cases} 3x+2y=-1 & ① \\ 4x+y=2 & ② \end{cases}$

• En utilisant une des équations du système, exprimer une inconnue en fonction de l'autre.	L'équation ② peut s'écrire $y=2-4x$
• Remplacer (substituer) l'inconnue par son expression dans l'autre équation.	En remplaçant y par $2-4x$ dans l'équation ① on obtient l'équation $3x+2\times(2-4x)=-1$
• Résoudre l'équation ainsi obtenue pour déterminer la valeur de l'inconnue.	$3x+2\times(2-4x)=-1$ $3x+4-8x=-1$ $-5x+4=-1$ $-5x=-1-4$ $x=\frac{-5}{-5}$ $x=1$
• Remplacer l'inconnue par sa valeur dans une des équations afin de déterminer l'autre inconnue.	$Si\ x=1\ alors\ y=2-4x\ s'écrit\ y=2-4\times1$ $ou\ encore\ y=2-4\ soit\ y=-2$
• Vérifier et conclure.	$3\times1+2\times-2=3-4=-1$ l'équation □ est vérifiée. $4\times1+(-2)=4-2=2$ l'équation ② est vérifiée. Donc le couple $(x\,;y)=(1\,;-2)$ est solution du système.

C3T14 – Systèmes d'équations

2. Méthode de résolution par combinaisons linéaires (ou addition)

Exemple : résolution du système $\begin{cases} 3x+4y=5 & ① \\ 5x-2y=17 & ② \end{cases}$

• Ajuster les coefficients d'une des inconnues pour obtenir des coefficients égaux ou opposés.	En multipliant les 2 membres de l'équation ② par 2, on obtient : $\begin{cases} 3x+4y=5 & ① \\ 10x-4y=34 & ② \end{cases}$
• Ajouter ou soustraire membre à membre les équations du système pour éliminer l'une des inconnues.	En ajoutant membre à membre les 2 équations, on obtient l'équation $(3x+4y)+(10x-4\text{y})=5+34 \quad soit \quad 13x=39$
• Résoudre l'équation ainsi obtenue.	$13x=39 \quad d'où \quad x=3$
• Remplacer l'inconnue par la valeur déterminée dans une des équations du système et la résoudre.	En remplaçant ***x*** par **3** dans l'équation □ on obtient : $3\times3+4y=5 \quad soit \quad 9+4y=5$ $soit\ encore \quad 4\text{y}=-4 \quad d'où \quad y=-1$
• Vérifier et conclure.	$3\times3+4\times(-1)=9-4=5$ l'équation □ est vérifiée. $5\times3-2\times(-1)=15+2=17$ l'équation ② est vérifiée. Donc le couple $(x\,;y)=(3\,;-1)$ est solution du système.

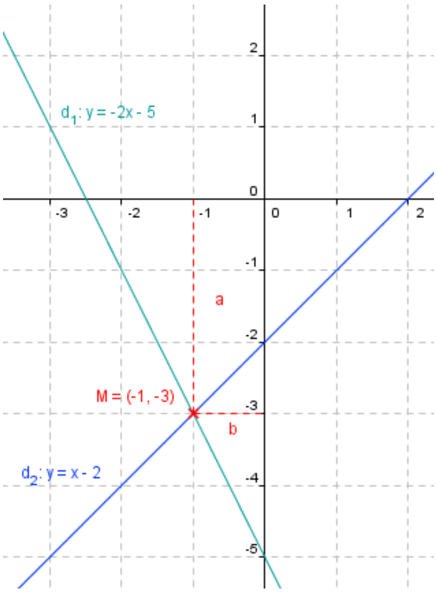
C3T14 – Systèmes d'équations

3. Interprétation graphique

En exprimant y en fonction de x, chaque équation d'un système peut être interprétée comme une formule définissant une fonction affine (forme $y=ax+b$).

L'idée est donc de tracer les droites représentant graphiquement chaque fonction, puis de lire les coordonnées du point d'intersection. Ces coordonnées correspondent à la solution du système d'équations, (sous réserve d'erreurs liées à la lecture graphique).

Exemple : résolution du système $\begin{cases} 2x+y=-5 & ① \\ x-y=2 & ② \end{cases}$

• Écrire chaque équation sous la forme $y=ax+b$	① peut s'écrire $y=-5-2x$ et ② peut s'écrire $-y=2-x$ Le système devient $\begin{cases} y=-2x-5 & ① \\ y=x-2 & ② \end{cases}$
• Dans un repère, tracer les droites d_1 et d_2 correspondantes aux équations ① et ②.	
• Lire les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2, en déduire la solution du système.	On lit $(x\,;y)=(-1\,;-3)$.
• Vérifier et conclure.	$2\times(-1)+(-3)=-5$ l'équation ① est vérifiée. $-1-(-3)=2$ l'équation ② est vérifiée. Donc le couple $(x\,;y)=(-1\,;-3)$ est la solution du système.

Objectif 14-2 **Appliquer ces méthodes pour calculer les coefficients a et b d'une application affine.** **(voir exercices)**

C3T14 – Systèmes d'équations

Objectif 14-3 Traduire un énoncé par un système de deux équations à deux inconnues et résoudre le problème

Exemple

Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €. Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choix des inconnues	
On repère les inconnues. On les note généralement x et y.	Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.
Étape n°2 : Mise en équation du problème	
On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x et de y.	205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$. La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4,50y = 1\,222,50$.
L'énoncé se traduit par un système de 2 équations à 2 inconnues.	$\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases}$
Étape n°3 : Résoudre le système (ici on choisit la méthode par substitution)	
On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.	$x = 205 - y$
On remplace (substitue) x par $205 - y$ dans la deuxième équation.	$7(205 - y) + 4,50y = 1\,222,50$
On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y.	$1\,435 - 7y + 4,50y = 1\,222,50$ $-2,50y = -212,50$; y = 85
On remplace y par 85 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x.	$x = 205 - 85$ $x = 120$
Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème	
On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est solution du système : si $\begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}$ on a bien $\begin{cases} 120 + 85 = 205 \\ 7 \times 120 + 4,50 \times 85 = 840 + 382,50 = 1\,222,50 \end{cases}$.	
Étape n°5 : Conclure	
120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.	