C3T15 – Probabilités

Objectif 15-1 Vocabulaire

1. Expérience aléatoire

Exemples

- E_1 On lance un dé non truqué à 6 faces.
- E_2 On tire une carte d'un jeu qui en comporte 32.
- E_3 On lance, deux fois de suite, une pièce de monnaie.

Définition

On appelle **expérience aléatoire** un processus dont on peut prévoir tous les résultats possibles mais dont on ignore lequel sera obtenu.

2. Partie, tirage, lancer, épreuve

Exemples

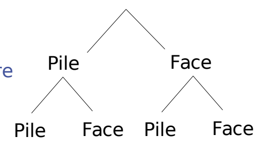
Pour E_1 et E_2 une partie se compose d'une épreuve unique, une seule étape, un seul lancer, un seul tirage. Pour E_3 une partie est composée de 2 épreuves, 2 étapes, 2 lancers, 2 tirages.

3. Ensemble Ω des résultats (ou issues ou éventualités) possibles

Exemples

- E_1 Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
- E_2 Ω = {7♠ ; 8♠ ; 9♠ ; 10♠ ; V♠ ; D♠ ; R♠ ; A♠ ; 7♥ ; 8♥ ; 9♥ ; 10♥ ; V♥ ; D♥ ; R♥ ; A♥ ; 7♦ ; 8♦ ; 9♦ ; 10♦ ; V♦ ; D♦ ; R♦ ; A♦ ; 7♣ ; 8♣ ; 9♣; 10♣; V♣; D♣; R♣; A♣}
- E_3 Ω = {(Pile,Pile) ; (Pile,Face) ; (Face,Pile) ; (Face,Face)}

arbre binaire



Avant de traiter un problème de probabilité il est fortement recommandé d'expliciter l'ensemble Ω.

4. Événement

Exemples

- E_1 {«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6}

  {«Tirer un nombre inférieur ou égal à 4»} = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

  {«Tirer un 3»} = {3}

- E_2 {«Tirer un trèfle»} = {7♣ ; 8♣ ; 9♣ ; 10♣ ; V♣ ; D♣ ; R♣ ; A♣}

  {«Tirer un valet»} = {V♦ ; V♥ ; V♠ ; V♣}

  {«Tirer le roi de trèfles»} = {R♣}

- E_3 {« Tirer 2 fois face »} = {(Face,Face)}

  {« Tirer face au premier lancer »} = {(Face,Face) ; (Face,Pile)}

  {« Finir par un pile »} = {(Face,Pile) ; (Pile,Pile)}}

C3T15 – Probabilités

5. Événement élémentaire

C'est un événement qui ne comporte qu'une seule issue. (1 seul élément de l'ensemble Ω).

Exemples

{«Tirer un 3»} = {3} ; {«Tirer le roi de trèfles»} = {R♣} ; {« Tirer 2 fois face »} = {(Face,Face)}

Remarques

Si {«Tirer un 3»} est réalisé alors {«Tirer un nombre inférieur ou égal à 4»} l'est aussi mais pas {«Tirer un nombre pair»}.

Si {«Tirer le roi de trèfles»}est réalisé alors {«Tirer un trèfle»}l'est aussi mais pas {«Tirer un valet»}.

6. Événements complémentaires (ou contraires)

Deux événements sont complémentaires si lorsque l'un est réalisé l'autre ne l'est pas.

Exemple

{«Tirer un nombre pair»} = {2 ; 4 ; 6} et {«Tirer un nombre impair»} = {1 ; 3 ; 5}.

Objectif 15-2 Calculer des probabilités en utilisant un modèle

Il est parfois possible d'évaluer des probabilités par un raisonnement à priori.

Exemple 1

Détermine la probabilité de tirer un as dans un jeu de 32 cartes.

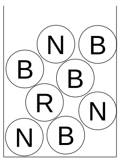
Ω = {7♠ ; 8♠ ; 9♠ ; 10♠ ; V♠ ; D♠ ; R♠ ; A♠ ; 7♥ ; 8♥ ; 9♥ ; 10♥ ; V♥ ; D♥ ; R♥ ; A♥ ;

7♦ ; 8♦ ; 9♦ ; 10♦ ; V♦ ; D♦ ; R♦ ; A♦ ; 7♣ ; 8♣ ; 9♣; 10♣; V♣; D♣; R♣; A♣}

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre as. Il y a donc quatre chances sur 32 de tirer un as soit une probabilité de $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Exemple 2

Dans une urne, il y a une boule rouge, quatre bleues et trois noires, indiscernables au toucher. Détermine la probabilité de tirer une boule bleue.



Ω = {R ; B ; B ; B ; B ; N ; N ; N}. Il y a 8 boules en tout dans l'urne, donc il y a 4 chances sur 8 de tirer une boule bleue soit une probabilité de $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Conclusion

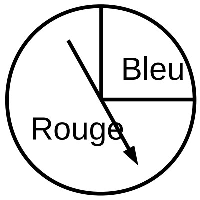
Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire on dit qu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale à $\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Exemple 3

Dans une loterie, une roue est divisée en deux secteurs, rouge et bleu, comme indiqué sur le schéma. On fait tourner un pointeur et il s'arrête, au hasard, devant l'un des secteurs. S'il s'arrête sur une ligne frontière on rejoue. Détermine la probabilité qu'il s'arrête sur le rouge.

Ω = {(« L'aiguille s'arrête sur le secteur rouge ») ; (« L'aiguille s'arrête sur le secteur Bleu »)}.

Deux événements complémentaires, non équiprobables.



On remarque que le secteur rouge occupe les trois-quart de la roue.

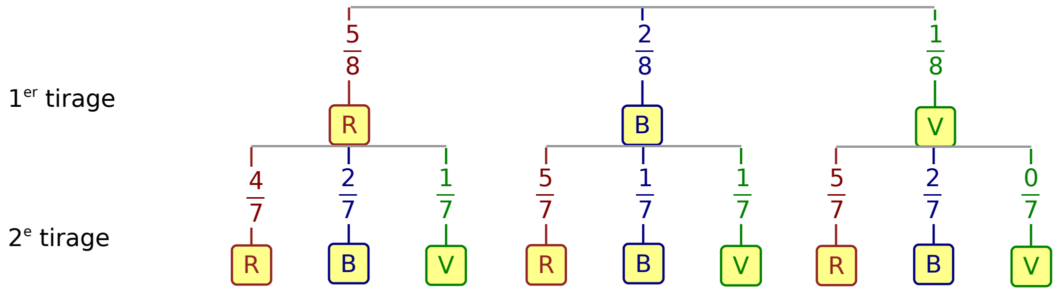
La probabilité que le pointeur s'arrête sur le secteur rouge est de $\frac{3}{4}$.

Objectif 15-3 Calculer des probabilités dans le cas d'expériences à deux épreuves

Exemple

Dans une urne, il y a cinq boules rouges (R), deux boules bleues (B) et une boule verte (V), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules. Détermine la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

On peut représenter tous les résultats sur un arbre en indiquant sur les branches correspondantes la probabilité de chaque résultat lors des deux tirages (l'expérience s'effectuant sans remise, il restera sept boules au second tirage).



L'événement « tirer deux boules de la même couleur » est réalisé si l'un des deux événements élémentaires *« obtenir (R, R) » ou « obtenir (B, B) » est réalisé.*

L'événement « obtenir (V, V) » n'est jamais réalisé, il est impossible : il n'y a qu'une boule verte.

Probabilité de l'événement « obtenir (R, R) » : La probabilité d'obtenir R au premier tirage est de $\frac{5}{8}$ et celle d'obtenir R une nouvelle fois lors du deuxième tirage est $\frac{4}{7}$. La probabilité de l'événement « obtenir (R, R) » est donc : $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$, soit environ 35,7%.

Probabilité de l'événement « obtenir (B, B) » : La probabilité d'obtenir B au premier tirage est de $\frac{2}{8}$ et celle d'obtenir B une nouvelle fois lors du deuxième tirage est $\frac{1}{7}$. La probabilité de l'événement « obtenir (B, B) » est donc : $\frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$, soit environ 3,6%.

Conclusion

La probabilité de l'événement « tirer deux boules de la même couleur » est donc de $\frac{20}{56} + \frac{2}{56} = \frac{22}{56}$ soit environ 39,3%.

Objectif 15-4 Évaluer des probabilités à partir de fréquences observées expérimentalement

Lorsqu'il n'est pas possible de modéliser l'expérience, on peut estimer les probabilités en s'appuyant sur les résultats observés et en calculant les fréquences qui en découlent.

Remarque : Il faut un très grand nombre de résultats pour pouvoir avoir une estimation à peu près correcte des probabilités.

Exemple

On a lancé un dé pipé (c'est à dire déséquilibré) 3000 fois, et on a relevé les résultats dans le tableau suivant. Détermine la probabilité d'obtenir un 5 avec ce dé.

numéro	1	2	3	4	5	6
tirages	**685**	**428**	**556**	**444**	**572**	**315**

Le 5 est sorti 572 fois sur 3000, la probabilité **semble être** d'environ $\frac{572}{3000} \approx 0{,}19$.

(Pour rappel, avec un dé équilibré, la probabilité d'obtenir chaque numéro est de $\frac{1}{6} \approx 0{,}166$).