C3T3 – PGCD - Puissances

Activité 1 Division euclidienne

1. On veut partager équitablement un lot de 357 CD entre 12 personnes.
 - a. Combien de CD aura chaque personne ?
 - b. Combien de CD restera-t-il après le partage ?
2. Pose la division euclidienne de 631 par 17.
 - a. Écris 631 sous la forme $17 \times q + r$ où q et r sont des entiers naturels et $r < 17$.
 - b. Dans cette opération, comment s'appellent les nombres 631 ; 17 ; q et r ?
3. On considère l'égalité suivante : $983 = 45 \times 21 + 38$.

Utilise-la pour répondre aux questions suivantes, en justifiant et sans effectuer de division.

- a. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 983 par 45 ? Par 21 ?
- b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 990 par 45 ?
- c. De 953 par 21 ?

Activité 2 Diviseurs communs, PGCD

1. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ?

Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

2. PGCD
 - a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?
 - b. On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).
Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Que remarques-tu ?
Quel est le PGCD de 15 et 15 ?
Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

C3T3 – PGCD - Puissances

Activité 3 Puissances d'un nombre relatif a (exposant entier positif)

1. Écriture décimale et signe des puissances d'un nombre a (l'exposant n est un entier strictement positif)

Rappel : la notation « puissance » est utilisée pour remplacer des produits comme dans les exemples suivants :

- $9 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ facteurs}} = 3^2$ qui se lit « 3 au carré » ou « 3 puissance 2 » ou « 3 exposant 2 »
- $-125 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5)}_{3 \text{ facteurs}} = (-5)^3$ qui se lit « -5 puissance 3 » ou « -5 exposant 3 ».

a. Complète la règle : « un produit est négatif s'il comporte un nombre de facteurs »

« un produit est positif s'il comporte un nombre de facteurs »

b. En décomposant comme dans le paragraphe rappel, donne l'écriture décimale des nombres suivants :

$$A = (+2)^{10} \text{ ou } 2^{10} \quad B = (+5)^3 \text{ ou } 5^3 \quad C = (-1)^{356} \quad \text{et} \quad D = (-3)^5.$$

c. Même question pour : $A' = (+2)^{11}$ ou 2^{11} $B' = (+5)^4$ ou 5^4 $C' = (-1)^{357}$ et $D' = (-3)^6$.

d. A l'aide des exemples précédents, complète la règle ci-dessous :

Pour tout nombre entier relatif positif n,

- Si a est positif alors a^n est toujours
- Si a est négatif alors a^n est positif lorsque l'exposant n est ..., et négatif lorsque l'exposant n est

2. Autres puissances d'un nombre a non nul (exposant entier relatif)

a. Observe le tableau :

	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$	$\xrightarrow{:2}$
Écriture décimale	16	8	4	2	1	0,5 ou $\frac{1}{2}$	0,25 ou $\frac{1}{4}$	0,125 ou $\frac{1}{8}$
Écriture avec exposant	2^4	2^3	2^2					

A quelle opération sur l'exposant la division par 2 correspond-elle ?

b. Reproduis le tableau et propose une écriture avec exposant des nombres :

2 1 0,5 0,25 0,125

a. Observe le tableau :

	$\xrightarrow{:3}$							
Écriture décimale	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
Écriture avec exposant	3^4	3^3	3^2					

C3T3 – PGCD - Puissances

A quelle opération sur l'exposant la division par 3 correspond-elle?

b. Reproduis le tableau et propose une écriture avec exposant des nombres :

$$3 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27}$$

a. Propose enfin une écriture avec exposant, pour a non nul, des nombres : $a \quad 1 \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a^2} \quad \frac{1}{a^3}$

b. Complète : $a^{-1} \times a^1 = \frac{1}{a} \times a =$ $a^{-3} \times a^3 = \frac{1}{a^3} \times a^3 =$

$$a^{-2} \times a^2 = \frac{1}{a^2} \times a^2 =$$
 $a^{-4} \times a^4 = \frac{1}{a^4} \times a^4 =$

c. En te rappelant que deux nombres sont inverses si leur produit vaut 1, déduis, de ce qui précède, les inverses de : $a^2; a^3; a^4; a^{-2}; a^{-3}; a^{-4}$

$$\frac{1}{a^2} = a \quad \dots$$

$$\frac{1}{a^3} = a \quad \dots$$

$$\frac{1}{a^4} = a \quad \dots$$

$$\frac{1}{a^{-2}} = a \quad \dots$$

$$\frac{1}{a^{-3}} = a \quad \dots$$

$$\frac{1}{a^{-4}} = a \quad \dots$$

3. Retour sur la règle vue au §1.d

a. Complète : $(-5)^{-2} = \frac{1}{\dots} = +\frac{1}{\dots} = +0, \dots$ $(-5)^{-3} = \frac{1}{\dots} = -\frac{1}{\dots} = \dots, \dots$

b. A l'aide des exemples précédents, **peut-on étendre comme suit** la règle vue au §1.d ?

- Pour tout nombre **entier relatif n**, positif ou négatif,
- Si a est **positif** alors a^n est toujours
 - Si a est **négatif** alors a^n est **positif** lorsque l'exposant n est ..., et **négatif** lorsque l'exposant n est ...

4. Signe des puissances d'un nombre a non nul(suite et fin)

En l'absence de parenthèses, les puissances sont prioritaires sur les multiplications et les divisions.

a. Calcule -7^2 ; $(-7)^2$; $(-7)^{-2}$; -7^{-2}

b. Complète : Attention donc à **ne pas confondre** un nombre et son !

C3T3 – PGCD - Puissances

Activité 4 Opérations avec des puissances d'un nombre a non nul

1. Produit de puissances de a d'exposants positifs

$$a^2 \times a^3 = \underbrace{a \times a}_{\dots \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times a}_{\dots \text{ facteurs}} = a^{\dots} \quad a^5 \times a^4 = \underbrace{a \times \dots \times a}_{\dots \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{\dots \text{ facteurs}} = a^{\dots}$$

... facteurs au total ... facteurs au total

- a. Recopie puis complète les expressions ci-dessus.
- b. Calcule de la même façon : $a^5 \times a^8$ et $a^7 \times a^6$.
- c. Complète alors la formule suivante : « Pour tous nombres **entiers positifs** n et p : $a^n \times a^p = a^{\dots}$. »

2. Produits de deux puissances d'exposants entiers relatifs

- a. Recopie le calcul en justifiant chaque étape, puis donne le résultat sous la forme $a^{\dots}$

$$a^5 \times a^{-2} = a^5 \times \frac{1}{a^2} = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a^{\dots}$$

- b. En détaillant les calculs comme au § a., écrire les produits suivants sous la forme d'une puissance de a d'exposant positif ou négatif :

$$a^7 \times a^{-4} \qquad a^{-3} \times a^{-5} \qquad a^{-4} \times a^{-2} \qquad a^{-3} \times a^1$$

- c. Complète alors la formule suivante : « Pour tous nombres **entiers relatifs** n et p : $a^n \times a^p = a^{\dots}$. »

3. Quotient de puissances de a (non nul)

- a. Justifie les calculs suivants : $\frac{a^2}{a^5} = a^2 \times \frac{1}{a^5} = a^2 \times a^{-5} = a^{2+(-5)} = a^{-3} = a^{-3}$

- b. Recommence avec les fractions suivantes : $\frac{a^5}{a^3}$, $\frac{a^3}{a^{-2}}$, $\frac{a^{-4}}{a^2}$, $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$.

- c. Complète alors la formule suivante : « Pour tous nombres **entiers relatifs** n et p : $\frac{a^n}{a^p} = a^{\dots}$. »

4. Puissance de puissance du nombre a

- a. Compte le nombre de facteurs a contenus dans l'écriture décomposée de $(a^2)^3$
- b. Recommence avec $(a^3)^5$. Combien aurait-on de facteurs a dans $(a^5)^8$?
- c. Complète alors la formule suivante : « Pour tous nombres entiers positifs n et p : $(a^n)^p = a^{\dots}$. »
- d. En utilisant « si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ » calcule $(a^{-2})^3$, $(a^2)^{-3}$ puis $(a^{-2})^{-3}$.

La formule obtenue précédemment semble-t-elle encore valable pour n et p entiers relatifs ?

C3T3 – PGCD - Puissances

Activité 5 Puissance d'un produit, puissance d'un quotient

- a. Calcule d'une part $(3 \times 5)^2$ puis $3^2 \times 5^2$ et d'autre part $(10 \times 5)^3$ puis $10^3 \times 5^3$. Que constates-tu ?

Complète : « Il semble que pour tous nombres relatifs a et b on ait $(a \times b)^n = \dots \times \dots$.

Quelle propriété de la multiplication permet de démontrer cette conjecture ?

- b. Calcule d'une part $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ puis $\frac{3^2}{5^2}$ et d'autre part $\left(\frac{10}{5}\right)^3$ puis $\frac{10^3}{5^3}$. Que constates-tu ?

Complète : « Il semble que pour tous nombres relatifs a et b, b non nul, on ait $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\dots}{\dots}$.

Quelle opération sur les fractions permet de démontrer cette conjecture ?