C3T3 – PGCD - Puissances

Objectif 3-1 Division euclidienne

Définition

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

La division euclidienne de l'entier a par l'entier b est l'opération qui permet de trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$

q est le quotient (entier) et r le reste associé.

Pour calculer q et r avec la calculatrice, on divise a par b, puis :

- si on obtient un entier, c'est le quotient q et alors r = 0.
- si on obtient un nombre à virgule, q est sa troncature à l'unité et on obtient r en calculant a-bq.

Certaines calculatrices donnent directement les nombres q et r en utilisant une touche spéciale.

Multiples, diviseurs

$$\begin{array}{c|c} 56 & 8 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

$56 = 8 \times 7 + 0$

Comme le reste est nul, l'écriture 56 = 8 × 7 traduit que 56 = 8 x … mais aussi 56 = 7 x … donc :

- « 56 **est un** multiple de 8 et de 7 » ou encore « 8 et 7 **ont pour** multiples 56 »
- « 8 et 7 **sont** des diviseurs de 56 » ou encore « 56 **a pour** diviseurs 8 et 7 »

(attention il y en a d'autres, par exemple 2).

Nombre premier

Tout nombre *n* admet au moins 2 diviseurs : le nombre 1 et lui même puisque $n=n\times 1$.

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

Exemples : Liste des 10 premiers nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19; 23 ; 29

Rappel des critères de divisibilité

Un nombre est divisible par 2 si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

C3T3 – PGCD - Puissances

Objectif 3-2 PGCD de deux entiers naturels

Définitions

Le PGCD de deux entiers naturels désigne le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.

Remarque 1 : Pour tout nombre a, PGCD (a ; a) = a .

Remarque 2 : Si a et b sont des entiers naturels tels que b divise a, alors PGCD (a ; b) = b.

Exemples : PGCD (15 ; 15) = 15 PGCD (15 ; 5) = 5

1. Une première méthode pour calculer le PGCD

- on fait la liste de tous les diviseurs de chacun des deux nombres,
- on repère ceux qui sont communs aux deux nombres,
- on prend le plus grand.

Exemple : PGCD (30 , 105) = ?

On liste les diviseurs de 30 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 et 30.	On liste les diviseurs de 105 : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 et 105.

Les diviseurs communs à 30 et 105 sont : 1 ; 3 ; 5 et 15.

Le PGCD de 30 et 105 est donc 15, car c'est le plus grand des diviseurs communs.

On note PGCD (30 ; 105) = 15 ou PGCD (105 ; 30) = 15.

2. Méthode des soustractions successives

Propriété

Si a et b sont des entiers naturels et a ≥ b, alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a – b).

Exemple : PGCD (693 ; 189) = ?

Étape	Comparaison	a	b	a-b	Commentaires
1	693 > 189	693	189	504	PGCD (693 ; 189) = PGCD (189 ; 504)
2	504 > 189	504	189	315	PGCD (504 ; 189) = PGCD (189 ; 315)
3	315 > 189	315	189	126	PGCD (315 ; 189) = PGCD (189 ; 126)
4	189 > 126	189	126	63	PGCD (189 ; 126) = PGCD (126 ; 63)
5	126 > 63	126	63	63	PGCD (126 ; 63) = PGCD (63 ; 63)
6	63 = 63	63	63	0	Et d'après la remarque 1 : PGCD (63 ; 63) = 63

Conclusion : PGCD (693 ; 189) = 63. (Dernière différence non nulle)

C3T3 – PGCD - Puissances

3. Méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide)

Propriété

Si a et b sont des entiers naturels et a ≥ b, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple : PGCD (782 ; 136) = ?

$$\begin{array}{r|l} 782 & 136 \\ \cline{2-2} 102 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 136 & 102 \\ \cline{2-2} 34 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 102 & 34 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Étape	Dividende	Diviseur	Reste	Division euclidienne	Commentaires
1	782	136	102	782 = 136 x 5 + 102	PGCD(782 ; 136) = PGCD(136 ; 102)
2	136	102	34	136 = 102 x 1 + 34	PGCD (136 ; 102) = PGCD (102 ; 34)
3	102	34	0	102 = 34 x 3 + 0	Le reste est nul , ce qui signifie que 34 est un diviseur de 102, et d'après la remarque 2, PGCD (102 ; 34) = 34.

Conclusion : PGCD (782 ; 136) = 34. (Dernier reste non nul)

Objectif 3-3 Nombres premiers entre eux

Définition

Lorsque le PGCD de deux nombres est égal à 1, on dit que ces nombres sont premiers entre eux.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

$$\begin{array}{r|l} 91 & 45 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 45 \end{array}$$

Étape	Dividende	Diviseur	Quotient	Reste	Commentaires
1	91	45	2	1	PGCD(91 ; 45) = PGCD(45 ; 1)
2	45	1	45	0	PGCD (45 ; 1) = 1 d'après la remarque 2

Conclusion : PGCD (91 ; 45) = 1 donc les deux nombres sont premiers entre eux.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux divisibles par 2 donc ils ont un diviseur commun autre que 1.

Leur PGCD n'est pas égal à 1 , ainsi 426 et 568 ne sont pas premiers entre eux.

Objectif 3-4 Fraction irréductible

Définition

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode

Pour rendre une fraction irréductible on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.
Les quotients obtenus sont obligatoirement premiers entre eux.

Exemple : Rends la fraction $\frac{136}{782}$ irréductible.

On a vu dans l'exemple de la troisième méthode que PGCD (136 ; 782) = 34.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 : 34}{782 : 34} = \frac{4}{23}.$$

Autre méthode possible

Pour rendre la fraction $\frac{198}{180}$ irréductible, on peut chercher à écrire 198 et 180 sous forme de produits de facteurs premiers : 198 = 2 × 3 x 3 × 11 et 180 = 2 x 2 × 3 x 3 × 5.

Le nombre (2 x 3 x 3) divise à la fois 198 et 180 et c'est le plus grand diviseur commun.

On a PGCD(198 ; 180) = (2 x 3 x 3) donc : $\frac{198}{180} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 11}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$ soit $\frac{198}{180} = \frac{11}{10}$.

C3T3 – PGCD - Puissances

Objectif 3-5 Connaître et utiliser les notations a^n et a^{-n} (a non nul)

1. Définitions

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}.$$

En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Par convention : $a^0 = 1$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et $0{,}25^{-3}$.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$0{,}25^{-3} = \dfrac{1}{0{,}25^3} = \dfrac{1}{0{,}015625} = 64.$

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale des nombres : $3^2 \times 3^3$ et $\dfrac{2^3}{2^5}$.

$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5 = 243$

$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

2. Appliquer les définitions pour des calculs simples

En l'absence de parenthèses les puissances sont prioritaires sur les multiplications et les divisions.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre $A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$.

$A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$		
$A = 64 + 250 \times \dfrac{1}{2} - 7$	$\longrightarrow$	On calcule les puissances, qui sont prioritaires, en utilisant leur définition.
$A = 64 + 125 - 7$	$\longrightarrow$	On effectue ensuite la multiplication.
A = 182	$\longrightarrow$	On termine par l'addition et la soustraction.

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale du nombre $B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$.

$B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$		
$B = 2^3 - 12^2$	$\longrightarrow$	On effectue d'abord les calculs entre parenthèses.
$B = 2 \times 2 \times 2 - 12 \times 12$	$\longrightarrow$	On applique la définition des puissances.
$B = 8 - 144$	$\longrightarrow$	On effectue ensuite les multiplications prioritaires.
B = **– 136**	$\longrightarrow$	On termine par la soustraction.

3. Déterminer les signes des puissances

À connaître

Pour tout nombre entier relatif n,
- Si a est **positif** alors a^n est **positif**.
- Si a est **négatif** alors a^n est **positif** lorsque l'exposant n est **pair,** et **négatif** lorsque l'exposant n est **impair.**

Exemple : Quel est le signe de $A = (-3)^4$**,** de $B = (-2)^{-5}$ et de $C = (+5)^3$?

Comme – 3 est négatif et l'exposant 4 est pair, **A est un nombre positif.**

Comme – 2 est négatif et l'exposant – 5 est impair, **B est un nombre négatif**.

Comme $(+5)^n$ est positif que l'exposant n soit pair ou impair. **C est un nombre positif.**

Pièges à éviter :

Ne pas confondre un nombre et son opposé (priorité aux puissances, sauf s'il y a des parenthèses).

$-5^2=-25$ $\qquad (-5)^2=+25$ $\qquad (-5)^{-2}=\frac{1}{(-5)^2}=+\frac{1}{25}=+0{,}04$ $\qquad -5^{-2}=\frac{1}{-5^2}=-\frac{1}{25}=-0{,}04$

Objectif 3-6 Utiliser les règles de calcul sur les puissances

À connaître

Pour tous nombres entiers relatifs m et p , et pour tous nombres relatifs a et b, non nuls, on a:

$$a^m \times a^p = a^{m+p} \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^p = a^{m\times p}$$

Exemples

- Donne l'écriture décimale du nombre $A = 2^4 \times 2^3$.

$$A = 2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$$

- Écris le nombre $B = \frac{7}{7^{-3}}$ sous la forme d'une seule puissance de 7.

$$B = \frac{7^1}{7^{-3}} = 7^{1-(-3)} = 7^{1+3} = 7^4$$

- Calcule $C=(2^{-5})^{-2}$

$$C = 2^{(-5)\times(-2)} = 2^{10} = 1024$$

- Écris sous forme décimale les nombres $D=(2^{-3})\times 5^{-3}$ et $E=\frac{10^3}{2^3}$

$$D=(2^{-3})\times 5^{-3}=(2\times 5)^{-3}=10^{-3}=0{,}001 \quad \text{et} \quad E=\frac{10^3}{2^3}=\left(\frac{10}{2}\right)^3=5^3=125$$