C3T6 – Calcul numérique 2 - Calcul littéral

Objectif 6-1 Utiliser le calcul littéral pour démontrer

Un énoncé sur des nombres

« La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3. »

Ceci semble être exact. Par exemple pour le deux multiples 15 et 21 la somme 36 est encore un multiple de 3.
Mais attention : des exemples ne permettent pas de prouver qu'un énoncé sur des nombres est vrai.
Pour prouver qu'un énoncé sur des nombres est vrai, il faut souvent utiliser des calculs littéraux.

Démonstration

Un multiple de 3 est un nombre qui peut s'écrire sous la forme 3k, où k représente un nombre entier.

Si 3m et 3n sont deux multiples de 3, leur somme vaut 3m+3n soit après factorisation 3(m+n).

Comme la somme de deux entiers est un entier, la somme est un multiple de 3. L'énoncé est vrai.

Objectif 6-2 Réduire, développer, factoriser

Rappels sur la distributivité :

Distributivité simple

Pour tous nombres relatifs k, a et b:

$$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$$

$$k\times(a-b)=k\times a-k\times b$$

Remarque : Développer c'est transformer un produit en une somme.

Exemple: Développe l'expression suivante: A=–3,5(**x**+2).

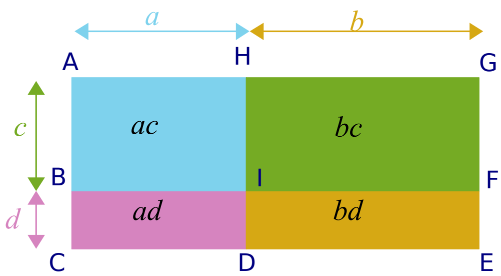
A=**–3,5**×(x+2)	⟶	On replace le signe × dans l'expression.
A=**(–3,5)**×x+**(–3,5)**×2	⟶	On distribue le facteur **–3,5**.
A=–3,5x-7	⟶	On calcule et on simplifie l'expression.

Double distributivité

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

(a + b)(c + d) = **ac** + **ad** + **bc** + **bd**

Aire ***ACEG***=Aire ***ABIH***+Aire ***BCDI***+Aire ***HIFG***+Aire ***IDEF***



Exemple

Développe et réduis l'expression suivante : $A = (3x + 1)(y - 4)$.

$A = 3x \times y + 3x \times (-4) + 1 \times y + 1 \times (-4)$ On applique la double distributivité.

$A = 3xy - 12x + y - 4$ On calcule les produits.

C3T6 – Calcul numérique 2 - Calcul littéral

1. Réduire une expression

Pour réduire une somme, on additionne les termes de même nature (termes en a, en x, en x², etc).
«on compte les a avec les a» puis «on compte les b avec les b», etc..., puis les nombres avec les nombres.

Exemple

$4a+12+3a+6+2b+7b=7a+9b+18$ $\qquad$ $6+10x^2-3x-4x^2+5x-1=6x^2+2x+5$

2. Développer une expression

Développer une expression c'est utiliser la distributivité pour transformer des produits de facteurs entre parenthèses en une somme de termes. On obtient alors une écriture sans parenthèses.

$$\underbrace{\underbrace{5}_{1^{er}\text{ facteur}} \times \underbrace{(a+8)}_{2^{nd}\text{ facteur}}}_{\text{produit}} = \underbrace{\underbrace{5\times a}_{1^{er}\text{ terme}} + \underbrace{5\times 8}_{2^{nd}\text{ terme}}}_{\text{somme}}$$

En écriture simplifiée, cela donne : $5(a+8)=5a+40$

A connaître : Trois modèles pour la distributivité

	En écriture simplifiée :
$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$	$a(b+c)=ab+ac$
$a\times(b-c)=a\times b-a\times c$	$a(b-c)=ab-ac$
$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Remarque :

- Il peut être nécessaire de développer plusieurs facteurs dans une expression.
- Lorsqu'un produit est précédé d'un signe « moins » , il est fortement recommandé de rajouter des parenthèses pour l'isoler le temps de faire le développement.

Exemple : Développer et réduire $7(x+3)-3(2x-5)$

$7(x+3)-3(2x-5)$	Deux développements à effectuer, le second est précédé d'un signe -
$=7(x+3)-\underbrace{[3(2x-5)]}_{\text{on isole}}$	Ajout de parenthèses (crochets) le temps de développer le second produit.
$=7x+21-[6x-15]$	On effectue les développements, le second en restant à l'intérieur des crochets.
$=7x+21-6x+15$	Suppression des crochets précédés d'un signe - : on inverse les opérations à l'intérieur.
$=x+36$	On réduit l'expression obtenue.

3. Factoriser une expression

La factorisation peut être considérée comme le procédé inverse du développement.
On part d'une somme de termes et on retrouve le produit de facteurs équivalent.
L'objectif est d'obtenir une écriture de l'expression sous la forme d'un unique produit, avec éventuellement des parenthèses.

Chaque modèle peut être utilisée dans les deux sens : $k\times(a+b) \underset{\text{factorisation}}{\overset{\text{développement}}{\rightleftarrows}} k\times a+k\times b$

Méthode : Pour pouvoir factoriser une expression, il faut l'identifier à un modèle utilisable, en recherchant en particulier un facteur commun (le k du modèle précédent).

Si aucun modèle ne semble applicable, remplacer les nombres par des produits ou ajouter des multiplications par 1, pour essayer de faire apparaître un facteur commun.

Exemples : Factoriser $15+3x$ et $(x+3)(x-4)+(x+3)(x+7)$ **:**

$15+3x$ Pas de modèle évident, on remplace 15 par un produit et on détaille toutes les multiplications.

$=3\times5+3\times x$	Un facteur commun apparaît : 3. On reconnaît le modèle $k\times a+k\times b$.
$=3\times(5+x)$	

$(x+3)(x-4)+(x+3)(x+7)$	On reconnaît le modèle $k\times a+k\times b$ avec (x+3) comme facteur commun.
$=(x+3)\times[(x-4)+(x+7)]$	On applique le modèle avec (x-4) dans le rôle du a et (x+7) dans celui du b. Les crochets sont les parenthèses du modèle.
$=(x+3)\times[2x+3]$	On réduit le contenu des crochets.

Objectif 6-3 Connaître les identités remarquables

A connaître

Pour tous nombres a et b :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	Carré d'une somme.
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	Carré d'une différence.
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	Produit de la somme par la différence.

Remarque : Comme les trois premiers modèles, ces 3 identités remarquables peuvent être utilisées dans les deux sens :

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{produit}} \underset{\text{factorisation}}{\overset{\text{développement}}{\rightleftarrows}} \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{somme}}$$

On les utilise pour faire de développements ou des factorisation, particulièrement lorsque des carrés sont présents dans l'expression.

Objectif 6-4 Utiliser les identités remarquables pour développer

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$	$\longrightarrow$	On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$	$\longrightarrow$	On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x - 4)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$	$\longrightarrow$	On remplace a par x et b par 4 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$	$\longrightarrow$	On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'expression $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$	$\longrightarrow$	On remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$	$\longrightarrow$	On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'expression $(a + b)(a - b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$(7x + 2)(7x - 2) = (7x)^2 - 2^2$	$\longrightarrow$	On remplace a par $7x$ et b par 2 dans $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4$	$\longrightarrow$	On réduit l'expression obtenue.

C3T6 – Calcul numérique 2 - Calcul littéral

Objectif 6-5 Utiliser les identités remarquables pour factoriser

Exemple 1 : Factorise l'expression A = $x^2 + 6x + 9$.

A = $x^2 + 6x + 9$	⟶	On observe trois termes précédés du signe +.
A = $x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.
A = $(x + 3)^2$	⟶	On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression B = $25x^2 - 20x + 4$.

B = $25x^2 - 20x + 4$	⟶	On observe trois termes et des signes différents.
B = $(5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ *avec* $a = 5x$ et $b = 2$.
B = $(5x - 2)^2$	⟶	On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression C = $64x^2 - 49$.

C = $64x^2 - 49$	⟶	On observe la différence de deux carrés.
C = $(8x)^2 - 7^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.
C = $(8x + 7)(8x - 7)$	⟶	On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

Objectif 6-6 Résoudre une équation produit

A connaître

Un produit de facteurs est nul (c'est à dire égal à 0) si l'un des facteurs, au moins, est nul.

Exemple d'utilisation : Résoudre l'équation $(3x+6)(2x-1)=0$

Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs, au moins, est nul, donc le produit $(3x+6)(2x-1)$ est nul lorsque $(3x+6)=0$ ou $(2x-1)=0$ donc :

$(3x+6)=0$	ou	$(2x-1)=0$
$3x=-6$		$2x=1$
$x=-2$		$x=0{,}5$

Conclusion : Les solutions de l'équation sont -2 et 0,5.