C3T9 – Racines carrées

Objectif 9-1 Connaître et utiliser la définition de la racine carrée d'un nombre positif

A connaître

La **racine carrée d'un nombre positif** a est le **nombre positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a. Le symbole $\boxed{\sqrt{}}$ est appelé « **radical** ».

Remarques : $\sqrt{a}$ <u>n'a pas de sens</u> lorsque a est un nombre strictement négatif, l'écriture est interdite dans ce cas.

A connaître

Pour tout nombre **positif** a, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

En français : « Le carré de la racine carrée d'un nombre positif est lui-même. »
« la racine carrée du carré d'un nombre positif est lui-même. »

Exemples de calculs sans calculatrice :

$\sqrt{9}$: On cherche le nombre positif dont le carré est 9. 9 = 3^2 donc $\sqrt{9} = 3$.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2$ donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

$\sqrt{1{,}3 \times 1{,}3}$: $\sqrt{1{,}3 \times 1{,}3} = \sqrt{1{,}3^2}$ donc $\sqrt{1{,}3 \times 1{,}3} = 1{,}3$.

Exemples de calculs avec la calculatrice :

$\sqrt{625}$: On utilise la touche $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculatrice, elle affiche 25, donc $\sqrt{625} = 25$ (**valeur exacte**).

$\sqrt{12{,}25}$: La calculatrice affiche 3,5, donc $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ (**valeur exacte**).

$\sqrt{2}$: La calculatrice affiche 1,414213562. L'affichage utilise les 10 chiffres (ou 12 selon la calculatrice) possibles, c'est très probablement une valeur approchée, on donnera une **valeur arrondie** : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (**valeur arrondie au millième**).

Remarque : On appelle **carré parfait** un nombre qui est le carré d'un nombre entier, sa racine carrée est donc un nombre entier positif.

Il sera utile de connaître quelques carrés parfaits :
1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225.

Objectif 9-2 Simplifier des expressions avec des racines carrées

A connaître

Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Pour tous nombres positifs a et b ($b \neq 0$), $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

En français : « La racine carrée d'un produit est égal au produit des racines carrées. »
« La racine carrée d'un quotient est égal au quotient des racines carrées. »

Attention : La racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées, et de même pour la différence.

Les racines carrés ont la même priorité que les puissances, donc sont prioritaires sur les multiplications et les division. Le radical sous-entend des parenthèses englobant tout ce qui se trouve sous la barre.

Application 1 : Simplifier $A = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$, $B = \sqrt{\frac{36}{25}}$ et $C = \frac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}}$.

$A = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

$B = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

$C = \frac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}} = \sqrt{\frac{0{,}56}{0{,}08}} = \sqrt{\frac{0{,}56 \times 100}{0{,}08 \times 100}} = \sqrt{\frac{56}{8}} = \sqrt{7}$

Application 2 : Écris le nombre $D = \sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$D = \sqrt{16 \times 2}$
$D = \sqrt{4^2 \times 2}$ ⟶ On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.
$D = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2}$
$D = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ⟶ On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

Application 3 : Écris $E = 2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers relatifs, d étant le plus petit possible.

$E = 2\sqrt{36 \times 2} - 7\sqrt{9 \times 2}$ ⟶ On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.

$E = 2\sqrt{36} \times \sqrt{2} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{2}$ ⟶ On décompose la racine carrée de chacun des produits.

$E = 2 \times 6\sqrt{2} - 7 \times 3\sqrt{2}$ ⟶ On applique la définition d'une racine carrée.

$E = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}$ ⟶ $\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.

$E = (12 - 21)\sqrt{2}$ ⟶ On factorise par $\sqrt{2}$.

$E = -9\sqrt{2}$ ⟶ On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

C3T9 – Racines carrées

Objectif 9-3 Résoudre des équations de la forme x² = a

A connaître

Pour tout nombre relatif a,
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution 0.
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemples : Résous les équations $x^2 = 3$, $x^2 = 36$ et $x^2 = -9$.

• $36 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 36$ sont $-\sqrt{36}$ et $\sqrt{36}$ soit – 6 et 6.

• $3 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

• $-9 < 0$ donc l'équation $x^2 = -9$ n'a aucune solution.