C4T14 – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Objectif 14-1 Équations

Vocabulaire

$2x - 5 = x + 1$ est une **équation** où l'**inconnue** est désignée par la lettre x.
Cette équation a deux **membres** : $2x - 5$ (membre de gauche) et $x + 1$ (membre de droite).
Les **solutions de l'équation** $2x - 5 = x + 1$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x - 5 = x + 1$ est vérifiée. **Résoudre l'équation** c'est trouver l'ensemble des solutions.

Exemple : 6 est-il une solution de l'équation $2x - 5 = x + 1$?

Pour $x = 6$, on calcule séparément $2x - 5$ et $x + 1$.

$$2x - 5 = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$$

$$x + 1 = 6 + 1 = 7$$

On constate que, pour $x = 6$, il y a égalité entre les deux membres
donc 6 est une solution de l'équation $2x - 5 = x + 1$.

À connaître

On obtient une égalité équivalente en ajoutant ou en soustrayant un même nombre à chaque membre.

On obtient une égalité équivalente en multipliant ou en divisant chaque membre par un même nombre non nul.

On obtient une égalité équivalente en permutant les membres de gauche et de droite.

Exemple : Résous l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

L'objectif est d'avoir les "x" d'un côté et les nombres de l'autre.

$$7x + 2 = \mathbf{4x} + 9$$
$$7x + 2 \mathbf{- 4x} = \mathbf{4x} + 9 \mathbf{- 4x}$$

→ **On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite** en retranchant **$4x$** aux deux membres.

$$3x \mathbf{+ 2} = 9 + 0x$$
$$3x \mathbf{+ 2 - 2} = 9 \mathbf{- 2}$$

→ **On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche** en retranchant **2** aux deux membres.

$$\mathbf{3}x = 7$$
$$\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{7}{\mathbf{3}}$$
$$x = \frac{7}{3}$$

→ **On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par **3**.

On vérifie que $\frac{7}{3}$ est une solution de l'équation initiale.

Conclusion : $x = \frac{7}{3}$ est la solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

C4T14 – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Objectif 14-2 Traduire un énoncé par une équation à une inconnue et résoudre le problème

À connaître

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

Remarque **:** Lorsque la résolution d'un problème par l'arithmétique devient fastidieuse voire impossible, utiliser une équation s'avère souvent nécessaire.

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à son double diminué de 3.

Étape n°1 : Choisir l'inconnue		
Soit x le nombre cherché.	⟶	**On repère la grandeur non connue** parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note généralement x et on l'appelle « inconnue ».
Étape n°2 : Mettre en équation		
Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$. Le double du nombre diminué de 3 est $2x - 3$.	⟶	**On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x.
$5x + 7 = 2x - 3$	⟶	La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.
Étape n°3 : Résoudre l'équation		
$5x + 7 = 2x - 3$ $5x + 7 - 2x = 2x - 3 - 2x$ $3x + 7 = -3$ $3x + 7 - 7 = -3 - 7$ $3x = -10$ $\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$ $x = -\frac{10}{3}$	⟶	**On résout l'équation** à l'aide des propriétés vues au § 8-5
Étape n°4 : Vérifier que la valeur trouvée est solution du problème et conclure.		
Le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 : $5 \times \left(-\frac{10}{3}\right) + 7 = -\frac{50}{3} + \frac{21}{3} = -\frac{29}{3}$		Le double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3 : $2 \times \left(-\frac{10}{3}\right) - 3 = -\frac{20}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{29}{3}$
Ainsi le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 est égal au double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3.		

Objectif 14-3 Inéquations

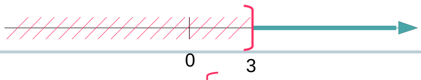
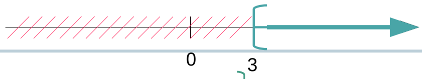
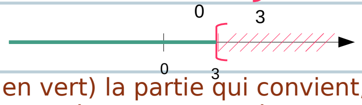
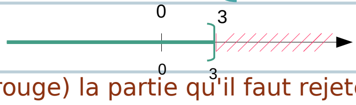
À retenir

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Règles utilisées

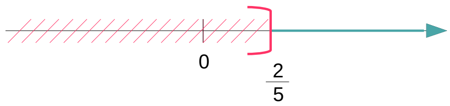
On ne change pas les solutions d'une inéquation lorsqu'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre.
Attention : lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre négatif le sens de l'inégalité est inversé(voir thème 12 calcul littéral objectif 12-3).

Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation

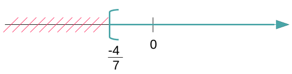
$x>3$		$x \geq 3$	
$x<3$		$x \leq 3$	

On colorie (ici en vert) la partie qui convient, on hachure (ici en rouge) la partie qu'il faut rejeter.
Le crochet est tourné vers la partie à laquelle appartient la limite et prend sa couleur.

Exemple 1 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $7x - 3 > 2x - 1$.

$7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x$	On soustrait $2x$ à chaque membre.
$5x - 3 > -1$	On réduit.
$5x - 3 + 3 > -1 + 3$	On ajoute 3 à chaque membre.
$5x > 2$	On réduit.
$x > \frac{2}{5}$	On **divise** chaque membre **par 5**. Comme 5 est un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité ne change pas.
Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$.	On conclut en décrivant les solutions*. 

Exemple 2 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-3x - 8 \leqslant x - 1$.

$-4x - 8 \leqslant -1$	On soustrait x à chaque membre.
$-4x \leqslant 7$	On ajoute 8 à chaque membre.
$x \geqslant -\frac{7}{4}$	On divise chaque membre par -4. Comme -4 est un nombre **négatif**, on change le sens de l'inégalité.
Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.	On conclut en décrivant les solutions*. 

C4T14 – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

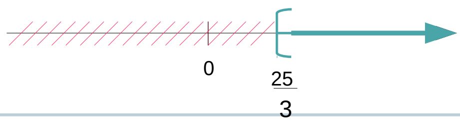
Objectif 14-4 Traduire un énoncé par une inéquation à une inconnue et résoudre le problème

Exemple

Un théâtre propose un tarif plein à 20 € et une carte d'abonnement, payée 50 €, donnant droit à un tarif réduit de 30 %.

Exprime, en fonction du nombre d'entrées, le prix à payer plein tarif et le prix avec abonnement.

Détermine le nombre d'entrées pour que l'abonnement soit avantageux.

Étape n°1 : Choix de l'inconnue	
On la note généralement x . **Attention au contraintes.**	Soit x le nombre d'entrées, x nombre entier positif.
Étape n°2 : Mise en inéquation du problème	
On exprime $P(x)$ (prix plein tarif). On exprime $P'(x)$ (prix avec abonnement) . Réduire de 30 % revient à multiplier par 0,70. On nous demande de déterminer x tel que $P'(x) \leq P(x)$	$P(x)=20x$ $P'(x)=0{,}7\times 20x+50=14x+50$ D'où l'inéquation : $14x+50 \leq 20x$
Étape n°3 : Résoudre l'inéquation	
On soustrait $14x$ à chaque membre de l'inéquation.	$14x+50-14x \leq 20x-14x$
On réduit.	$50 \leq 6x$
On divise chaque membre par le coefficient de x, ici 6 (positif) ; donc on ne change pas le sens de l'inégalité.	$\frac{50}{6} \leq \frac{6x}{6}$
On obtient un ensemble de solutions mathématiquess et sa représentation graphique.	$\frac{25}{3} \leq x$ ou encore $x \geq \frac{25}{3}$ 
Étape n°4 : Vérifier le calcul et contrôler la cohérence et la vraisemblance	
On vérifie ensuite que si $\frac{25}{3} \leq x$ *on a bien* $50 \leq 6x$ *puis* $50+14x \leq 6x+14x$ Mais l'ensemble des solutions mathématiques est à restreindre. **Il ne faut garder que les nombres entiers**.	
Étape n°5 : Conclure	
Et comme on cherche le plus petit entier de l'ensemble solution on conclut que : « l'abonnement est avantageux à partir de 9 entrées »	